PENGERTIAN PELUANG

Kuliah ke-2

Masalah

- Untuk acara tutup tahun, akan dipentaskan 5 jenis hiburan. Hiburan tersebut akan dipilih secara acak dari 10 hiburan yang telah dipersiapkan siswa. Dari 10 jenis hiburan tersebut terdiri atas 6 jenis hiburan musik dan 4 jenis tari kreasi siswa. Lebih besar mana peluangnya untuk terjadi, terpilih 3 jenis hiburan musik 2 hiburan tari ataukah 2 jenis hiburan musik 3 hiburan tari? Jelaskan jawaban anda

ISTILAH- ISTILAH

- **Ruang Sampel** atau **ruang contoh**, ditulis dengan S, adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan acak.
- **Titik sampel** adalah setiap anggota ruang sampel.
- **Kejadian** adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel. Himpunan bagian dari suang sampel S disebut "kejadian dalam S".
- Misal *A* dan *B* kejadian dalam ruang sampel *S*, dinotasikan

$$A, B \subseteq S$$

- **Gabungan dua kejadian A dan B,** ditulis $A \cup B$, adalah suatu kejadian yang anggota-anggotanya adalah anggota A atau anggota B.
- **Irisan (interseksi) dua kejadian A dan B,** ditulis $A \cap B$ adalah suatu kejadian yang anggotanya adalah anggota A dan sekaligus anggota B. Jika $A \cap B = \{ \}$, A dan B dikatakan saling asing atau merupakan dua kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama.
- **Komplemen** suatu kejadian A, ditulis A^C atau A' adalah suatu kejadian dalam S yang anggotanya adalah bukan anggota A.

CONTOH

- Suatu percobaan mengamati dua perangkat komputer dilakukan di lab komputer. Pengamatan dilakukan untuk mengetahui apakah perangkat komputer tersebut masih dalam keadaan baik (B) atau sudah cacat (C). Ruang sampel dari percobaan tersebut adalah S = {BB, BC, CB, CC}.
- Misal A : kejadian komputer pertama baik, maka A = {BB, BC}

  D : kejadian ada komputer cacat, maka D = {BC, CB, CC}

  E : kejadian kedua komputer baik maka E={BB}

  $A \cup D = \ldots.$

  $A \cap D = \ldots.$

  $A' = \ldots.$

DEFINISI PELUANG

1. **Definisi klasik**

Jika suatu percobaan dilakukan dan menghasilkan sejumlah hasil yang mungkin dan setiap hasil tidak mungkin terjadi bersama-sama serta masing-masing hasil mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi, maka definisi klasik peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan n(A)=banyak hasil yang mungkin dari kejadian A (banyak anggota A),

n(S)=banyak hasil yang mungkin dari ruang sampel S (banyak anggota ruang sampel S).

2. Definisi Empiris

- Peluang suatu kejadian dari suatu eksperimen berdasarkan frekuensi relatif yaitu hasil bagi banyaknya hasil yang mungkin dari suatu kejadian dengan banyaknya eksperimen yang dilakukan jika eksperimen dilakukan banyak kali.
- Secara matematis dituliskan sebagai

Peluang terjadinya kejadian A = limit frek relatif terjadinya kejadian A untuk n mendekati ∞ dinotasikan dengan

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_{rel}(A)$$

3. Definisi subjectif

- Penentuan peluang yang menggunakan intuisi, keyakinan diri, dan informasi tidak langsung, disebut **peluang subjektif.**

  Contoh:

  peluang seekor kuda memenangkan pertandingan

  peluang seseorang lulus dalam suatu ujian.

4. Definisi Aksiomatis

- Misal dalam suatu percobaan, S adalah ruang sampel dan A, A_1, A_2, ... adalah kejadian – kejadian dalam ruang sampel S. Suatu fungsi P(.) disebut fungsi peluang jika fungsi tersebut memasangkan setiap kejadian dalam ruang sampel S dengan bilangan riil P(A) serta memenuhi beberapa aksioma di bawah ini,

  untuk sembarang kejadian A

$$P(A) \geq 0 \qquad \text{(i)}$$

$$P(S) = 1 \qquad \text{(ii)}$$

Jika A_1, A_2, ... adalah kejadian-kejadian yang saling asing maka

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i) \qquad \text{(iii)}$$

MASALAH

- Suatu hari seorang pembalap mengikuti lomba balap motor dalam dua putaran. Peluang dia menang pada putaran pertama 0.7 dan peluang dia menang pada putaran kedua 0.6 dan peluang dia menang pada kedua putaran 0.5. Tentukan peluang bahwa
- Dia menang pada paling sedikit satu putaran
- Dia menang pada satu putaran
- Dia tidak menang pada kedua putaran

Sifat-sifat Peluang

Teorema 1.4.1

Jika A suatu kejadian dan A' komplemen dari A, maka $P(A) = 1 - P(A')$

Bukti:

$S \quad = A \cup A'$

$P(S) \quad = P(A \cup A')$

$1 \quad = P(A) + P(A')$ (aksioma ii & iii)

$P(A) \quad = 1 - P(A')$ (terbukti)

Teorema 1.4.2

Untuk setiap kejadian A, $P(A) \leq 1$

Bukti:

$P(A) = 1 - P(A')$ → teorema 1.4.1

$P(A') \geq 0$ → aksioma i (definisi aksiomatis)

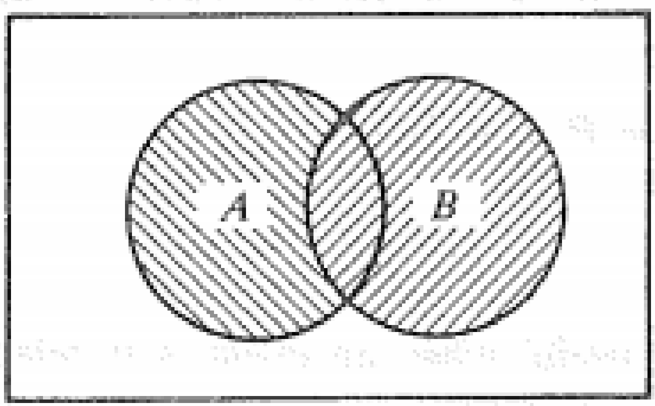
$0 \leq P(A) \leq 1$

Jadi $P(A) \leq 1$ (terbukti)

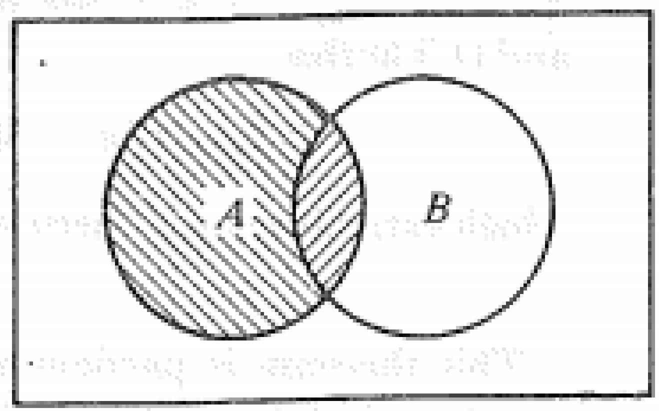
Teorema 1.4.3

Untuk setiap dua kejadian A dan B,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Perhatikan Gambar berikut



$A \cup B = (A \cap B') \cup B$



$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

Bukti:

$A \cup B$	$= (A \cap B') \cup B$ …..	(1)
A	$= (A \cap B') \cup (A \cap B)$	(saling asing)
$P(A)$	$= P(A \cap B') + P(A \cap B)$	
$P(A \cap B')$	$= P(A) - P(A \cap B)$ …..	(2)
$A \cup B$	$= (A \cap B') \cup B$	
$P(A \cup B)$	$= P(A \cap B') + P(B)$	(1) & (2)
	$= P(A) - P(A \cap B) + P(B)$	
$P(A \cup B)$	$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (terbukti)	

Theorem 1.4.4 For any three events A, B, and C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$

$$+ P(A \cap B \cap C)$$

Theorem 1.4.5 If $A \subset B$, then $P(A) \leqslant P(B)$.

Theorema 1.4.6

$$P(\cup A_i) \leq \Sigma\, P(A_i) \rightarrow \text{pertidaksamaan Boole}$$

Theorem 1.4.7 Bonferroni's Inequality If $A_1, A_2, \ldots, A_k$ are events, then

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{k} P(A_i') \qquad (1.4.7)$$

Proof

This follows from Theorem 1.4.1 applied to $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i'\right)'$, together with inequality (1.4.6). ■

Latihan 1(Bain, 43 no 2)

Two gum balls are obtained from the machine in Exercise 1 from two trials. The order of the outcomes is important. Assume that at least two balls of each color are in the machine.

(a) What is an appropriate sample space?

(b) How many total possible events are there that contain eight outcomes?

(c) Express the following events as unions of elementary events. C_1 = getting a red ball on the first trial, C_2 = getting at least one red ball, $C_1 \cap C_2$, $C_1' \cap C_2$.

Latihan 2(Bain, 44 no 9)

In Exercise 2, suppose that each of the nine possible outcomes in the sample space is equally likely to occur. Compute each of the following:

(a) $P(\text{both red})$.

(b) $P(C_1)$.

(c) $P(C_2)$.

(d) $P(C_1 \cap C_2)$.

(e) $P(C_1' \cap C_2)$.

(f) $P(C_1 \cup C_2)$.

Latihan 3(Bain, 45 no 22)

A track star runs two races on a certain day. The probability that he wins the first race is 0.7, the probability that he wins the second race is 0.6, and the probability that he wins both races is 0.5. Find the probability that:

(a) he wins at least one race.

(b) he wins exactly one race.

(c) he wins neither race.