Masalah Transportasi (Angkutan)

Masalah Transportasi membicarakan cara pendistribusian suatu komoditi dari sejumlah sumber (*Origin*) ke sejumlah tujuan (*Destination*). Sasarannya adalah mencari pola pendistribusian dan banyaknya komoditi yang diangkut dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan, yang meminimumkan ongkos angkut secara keseluruhan, dengan kendala-kendala yang ada.

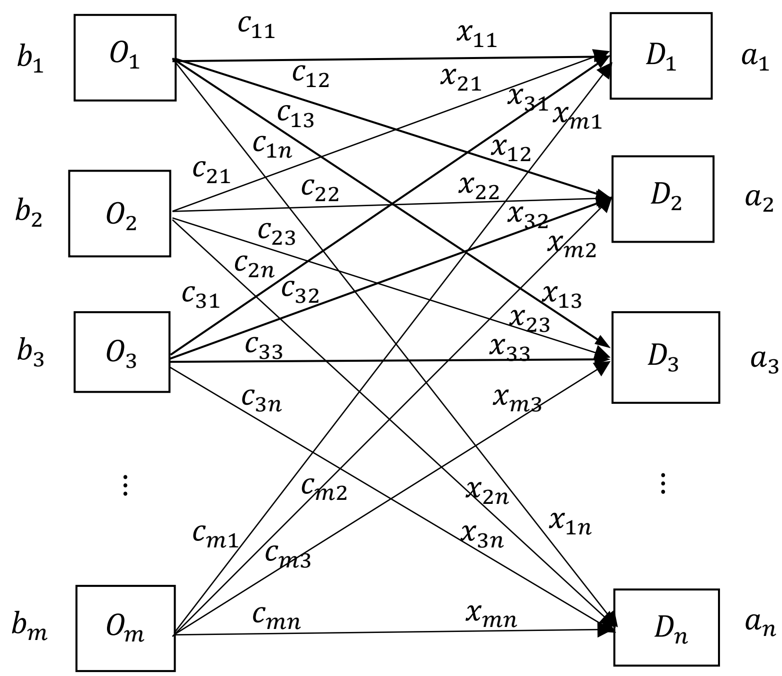
Pada masalah transportasi perlu mengetahui apa saja yang menjadi unsur penyusun masalah tansportasi serta asumsi apa saja yang diambil, sebagai berikut:

Skenario (diasumsikan)

1. Ada sumber (*origin*) dengan kapasitas (*supply*) maksimumnya.
2. Ada tujuan (*destination*) dengan permintaan (*demand*) minimumnya.
3. Ada jalur angkutan dari setiap sumber ke setiap tujuan beserta ongkos angkut satuan.
4. Ada satu macam komoditi saja yang diangkut.
5. Meminimumkan ongkos angkut total.

Biasanya data suatu masalah transportasi ditunjukkan dalam bentul tabel dan skema (diagram). Berikut ilustrasi skema masalah transportasi secara umum, dengan m sumber dan n tujuan. Pada masalah transportasi data sumber dan persediaannya, tujuan dan permintaannya, jalur transportasi serta biayanya akan diberikan.

Skema Masalah Transportasi



Keterangan skema

O_i : Sumber (*Origin*) ke-i ($i = 1,2,\dots,m$)

D_j : Tujuan (*Destination*) ke-j ($j = 1,2,\dots,n$)

b_i : Persediaan (*Supply*) maksimum pada O_i

a_j : Permintaan (*Demand*) minimum pada D_j

c_{ij} : Ongkos angkut satuan pada jalur $O_i \to D_j$

x_{ij} : Banyaknya unit komoditi yang diangkut dari O_i ke D_j (alokasi), selanjutnya disebut variabel. Jika komoditi dari O_i ke D_j ada, maka x_{ij} disebut variabel basis, sebaliknya jika komoditi dari O_i ke D_j tidak ada, maka x_{ij} disebut variabel non basis.

Ada asumsi tambahan yang perlu diingat, yaitu:

Asumsi

(i) Linearitas, yaitu biaya angkut berbanding lurus (proporsional) dengan banyaknya komoditi yang diangkut dari *origin* ke *destination*.

(ii) Hanya ada satu jenis komoditi yang diangkut.

Asumsi (i) berakibat masalah transportasi termasuk dalam kategori masalah program linear, sehingga cara menyelesaikannya bisa memanfaatkan metode yang sudah lazim dikenal, seperti yang akan dijabarkan kemudian.
Asumsi (ii) berakibat setiap *destination* bisa menerima kiriman dari setiap *origin*.

Sebagai bagian dari riset operasi, maka menjadi hal penting masalah transportasi adalah pemodelan matematika. Perhatikan pemodelan masalah transportasi umum yang diskemakan sebelumnya, tunjukkan persamaan dan perbedaannya dengan model masalah program linear yang lalu!

Formulasi Model Matematika

Berdasarkan skenario di atas, maka formulasi model matematika masalah transportasi adalah sebagai berikut:

Mencari $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$)

yang meminimumkan ongkos total

$$f = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

dengan kendala-kendala (*constraints*)

$$\sum_j x_{ij} \leq b_i, i = 1,2, \dots, m \tag{2}$$

$$\sum_i x_{ij} \geq a_j, j = 1,2, \dots, n. \tag{3}$$

Pertidaksamaan (2) disebut kendala *supply* dan pertidaksamaan (3) disebut kendala *demand*. Fungsi f pada persamaan (1) disebut fungsi tujuan / sasaran (*objective function*).

Data masalah transportasi dalam bentuk skema dan model matematika selanjutnya diterjemahkan dalam tabel transportasi dengan tampilan sebagai berikut: Apa perbedaannya dengan tabel simpleks?

Penyajian Data

Penyajian data masalah transportasi dituangkan dalam Tabel 1 berikut:

Tabel Transportasi

	D_1	D_2	D_3	$\cdots$	D_n	b_i	
O_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	$\cdots$ $\cdots$	c_{1n} x_{1n}	b_1	
O_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	$\cdots$ $\cdots$	c_{2n} x_{2n}	b_2	
O_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	$\cdots$ $\cdots$	c_{3n} x_{3n}	b_3	
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	
O_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	$\cdots$ $\cdots$	c_{mn} x_{mn}	b_m	
a_j	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n	$\sum a_j \diagdown \sum b_i$	

Tabel 1. Tabel Transportasi umum

Perhatikan dengan seksama data yang dimasukkan dalam tabel terhadap data pada skema dan data pada model matematika. Jangan keliru memasukkan data ya…

Perhatian berikutnya adalah masalah kesetimbangan (keseimbangan) antara data *supply* dengan *demand*, karena ada perbedaan perlakuan antara data setimbang dengan tak setimbang. Untuk mempermudah pemahaman kita batasi dulu pada pembahasan masalah setimbang.

Solusi Keadaan Setimbang

Jika $\sum b_i = \sum a_j$, yaitu total *supply* komoditi pada *origin* sama dengan total *demand* pada *destination*, maka masalah transportasi dikatakan setimbang. Dalam kasus setimbang, semua kendala, baik kendala *supply* maupun kendala *demand* pada model matematikanya (menjadi) berbentuk persamaan, yaitu

$$\sum_j x_{ij} = b_i, i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_i x_{ij} = a_j, j = 1,2, \dots, n.$$

Akibatnya banyaknya variabel basis adalah $m + n - 1$, sebab merupakan $m + n - 1$ persamaan yang saling independen. Cek, mengapa? Oleh karena itu penyelesaian layak basis (plb) terdiri atas $m + n - 1$ variabel basis. Catat!

Untuk mencari solusi optimum (minimum, sebagai dasar kita gunakan masalah minimum) masalah transportasi, dikerjakan dengan 3 langkah sebagai berikut:

Langkah I : *Menyusun Solusi Awal* (Tabel Awal)

Maksud menyusun solusi awal adalah untuk mencari plb awal.

Dasar hukum (dalil):

Hukum 1: *Tabel transportasi akan memberikan suatu plb bila dalam setiap pengisian alokasi dipilih alokasi yang memaksimalkan kotak dengan batasan supply dan demand*.

Hukum 2: *Plb paling tidak memuat satu solusi optimal*.

Untuk mencapai Langkah I yang harus dilakukan terlebih dahulu adalah melakukan pengisian kotak-kotak pada tabel transportasi. Yang dimaksud kotak disini adalah bagian kosong di bawah kotak ongkos c_{ij}. Kita beri notasi kotak adalah K_{ij}, untuk i dan j yang sesuai, sedangkan isian kotak adalah variabel (basis jika ada alokasi, non basis jika tidak ada alokasi), notasi x_{ij}.

Metode Pengisian Kotak-Kotak

Ada 3 cara pengisian kotak-kotak (penentuan alokasi atau penentuan variabel basis awal) yang akan kita pelajari yaitu Metode Sudut Barat Laut, Metode Vogel, dan Metode c_{ij} Terkecil.

Kita bahas satu persatu sebagai berikut:

Metode Sudut Barat Laut (SBL)

Metode ini hanya mementingkan solusi layak basis, belum memperhitungkan ongkos c_{ij}. Kotak pertama yang harus diisi adalah kotak dengan posisi arah barat laut dari mata angin (sudut barat laut) kemudian berpindah ke kanan atau ke bawah tergantung baris atau kolom mana yang tidak jenuh. Tidak jenuh yang dimaksud disini adalah yang diisikan belum memenuhi persediaan yang dimiliki atau permintaan yang diajukan. Atau dengan kata lain, masih ada persediaan yang tersisa atau permintaan yang belum dipenuhi. Pengalokasian harus memenuhi kriteria jenuh pada salah satu persediaan atau permintaan, dengan arah pergerakan pengisian ke kanan atau ke bawah dari kotak terakhir yang diisikan.

Pengisian kotak diteruskan sampai pengisian terakhir yang harus memenuhi kejenuhan secara bersamaan persediaan dan permintaan.

Untuk mempermudah ilustrasi, kita kerjakan contoh berikut:

Contoh. Suatu distributor pupuk mempunyai empat pangkalan O_1, O_2, O_3, O_4 yang berturut-turut menyimpan $40, 30, 30, 70$ ton pupuk. Bahan dagangan itu harus dikirim kepada 5 pembeli (destinasi) D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 berturut-turut $25, 25, 25, 35, 60$ ton. Selesaikan tabel awal.

Jawab:

Gambarkan skema masalah transportasinya!

Tentukan model matematika masalah transportasinya!

Perhatikan: total *supply* adalah $40 + 30 + 30 + 70 = 170$ ton pupuk

total *demand* adalah $25 + 25 + 25 + 35 + 60 = 170$ ton pupuk

Sehingga berlaku kasus setimbang.

Pengisian alokasi dengan Metode Sudut Barat Laut belum mempertimbangkan nilai c_{ij}, sehingga dengan data pada soal sudah bisa dilakukan. Perhatikan alur pengisian alokasi pada keterangan di bawah tabel transportasi ya…

Tabel Transportasi

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	b_i	
O_1	25	15				40	
O_2		10	20			30	
O_3			5	25		30	
O_4				10	60	70	
a_j	25	25	25	35	60	170 \ 170	

Setelah data dimasukkan ke dalam matriks 4×5, maka pengisian dimulai dari SBL, yakni

(1) kotak K_{11} diisi 25, dan akibatnya kolom ke-1 jenuh,

(2) kotak K_{12} diisi 15, agar baris ke-1 jenuh,

(3) kotak K_{22} diisi 10, agar kolom ke-2 jenuh,

(4) kotak K_{23} diisi 20, agar baris ke-3 jenuh,

(5) kotak K_{33} diisi 5, agar kolom ke-3 jenuh,

(6) kotak K_{34} diisi 25, agar baris ke-3 jenuh,

(7) kotak K_{44} diisi 10, agar kolom ke-4 jenuh,

(8) kotak K_{45} diisi 60, agar baris ke-4 jenuh. → selesai

Variabel basis awal yang diperoleh (urut sesuai pengisian kotak): $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{44}$, x_{45}. Terdapat 8 variabel basis awal. Variabel yang lain menjadi variabel non basis.

Periksa: banyaknya kotak yang terisi alokasi adalah 8. Nilai $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$. Jadi kotak-kotak isi tersebut adalah solusi layak basis. Dengan kata lain, tabel awal ini adalah tabel yang tidak merosot.

Selanjutnya tentukan nilai fungsi tujuan awalnya, misalkan data ongkos angkut per ton dari pangkalan P_i ke destinasi D_j adalah c_{ij} (ditulis pada sudut kanan atas pada setiap kotak) untuk semua i dan j, akan kita hitung total ongkos

$$C = c.x = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}.$$

Lihat tabel ongkos angkut satuan di bawah ini yang sejatinya telah diberikan pada soal.

3	1	4	6	6
7	3	4	2	7
2	7	8	9	5
4	5	2	6	9

dan tabel awal masalah transportasi dengan pengisian menggunakan Metode SBL sebagai berikut

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	b_i	
O_1	25 [3]	15 [1]	[4]	[6]	[6]	40	
O_2	[7]	10 [3]	20 [4]	[2]	[7]	30	
O_3	[2]	[7]	5 [8]	25 [9]	[5]	30	
O_4	[4]	[5]	[2]	10 [6]	60 [9]	70	
a_j	25	25	25	35	60	170 \ 170	

Maka $C = x_{11}c_{11} + x_{12}c_{12} + x_{22}c_{22} + x_{23}c_{23} + x_{33}c_{33} + x_{34}c_{34} + x_{44}c_{44} + x_{45}c_{45}$

$= 25.3 + 15.1 + 10.3 + 20.4 + 5.8 + 25.9 + 10.6 + 60.9$

$= 75 + 15 + 30 + 80 + 40 + 225 + 60 + 540$

$= 1065.$

Apakah C ini optimal? Tentu saja kita tidak tahu; yang kita tahu adalah bahwa solusi tersebut adalah solusi layak basis, tetapi karena solusi layak basis itu banyak, maka belum tentu nilai ini telah mencapai nilai optimum.

Cara berikutnya adalah Metode Vogel. Metode ini sudah mempertimbangkan nilai c_{ij}. Sedikit lebih rumit, namun hasil awal yang diperoleh lebih mendekati optimum. Mengapa? Cek!

Dalam pengerjaan Metode Vogel diperlukan baris dan kolom tambahan pada tabelnya.

Metode Vogel

Metode pengisian kotak bukan dari SBL tetapi memilih dengan mempertimbangkan nilai c_{ij}. Caranya adalah sebagai berikut:

(1) Carilah selisih dua c_{ij} terkecil dari setiap baris dan setiap kolom. Hasilnya dituliskan di sebelah kanan (untuk selisih baris) dan di bawah untuk selisih kolom.

(2) Diantara selisih-selisih ini carilah yang terbesar; misalnya p selisih kolom (jika ada dua nilai p yang sama boleh pilih salah satu). Jadi kolom ke-p adalah kolom yang akan diisi pertama kali.

(3) Dalam kolom ke-p pilihlah ongkos termurah, misalnya q. Maka kotak K_{pq} adalah kotak terpilih yang akan diisi terlebih dulu. Diisikan dengan alokasi x_{pq}. Gunakan prinsip mengisikan alokasi maksimum yang menjenuhkan (menghabiskan) persediaan atau (memenuhi) permintaan.

(4) Jika telah ada baris / kolom yang jenuh abaikan (dianggap tidak ada) dan ulangi dari pertama (1). Lakukan hingga alokasi terakhir.

Sebagai ilustrasi kita gunakan data soal dan tabel ongkos angkut satuan sebelumnya.

Contoh

Di ambil soal di atas:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	b_i	Selisih 2 c_{ij} terkecil
O_1	3	1 25	4	6	6 15	40	2 2 2 2 0 0
O_2	7	3	4	2 30	7	30	1 * * * * *
O_3	2 25	7	8	9	5 5	30	3 3 $\underline{3}$ 3 $\underline{4}$ *
O_4	4	5	2 25	6 5	9 40	70	2 2 2 $\underline{4}$ 3 $\underline{3}$
a_j	25	25	25	35	60	170	
Selisih 2 c_{ij} terkecil	1 1 1 * * *	2 $\underline{4}$ * * * *	2 2 2 2 * *	$\underline{4}$ 0 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1		

Selisih dua c_{ij} terkecil berada pada selisih kolom, yakni dengan nilai 4 dan berada pada kolom ke-4. Pada kolom ke-4 ini ongkos termurah adalah 2 berada pada baris ke-2. Jadi K_{24} harus diisi dulu. Agar jenuh $x_{24} = 30$.

Selisih terkecil pemeriksaan ke-2 adalah 4 berada pada kolom ke-2. Dalam kolom ke-2 ongkos termurah adalah 1 berada pada baris ke-1. Jadi kotak K_{12} mendapat giliran pengisian. $x_{12} = 25$. Maka kolom ke-2 jenuh.

Dst.

Sekarang kita lihat: Variabel basis awal yang diperoleh (sesuai urutan pengisian alokasi): $x_{24}, x_{12}, x_{31}, x_{43}, x_{35}, x_{44}, x_{15}, x_{45}$. Kotak isi ada $8 = m + n - 1$. Jadi sudah ada solusi layak basis awal.

Nilai ongkos total

$$C = 25.1 + 15.6 + 30.2 + 25.2 + 5.5 + 25.2 + 5.6 + 40.9$$
$$= 25 + 90 + 60 + 50 + 25 + 50 + 30 + 360$$
$= 690$. Lebih baik daripada SBL.

Metode ketiga adalah Metode c_{ij} terkecil. Metode ini juga sudah mempertimbangkan nilai ongkos (c_{ij}) masalah. Dibandingkan Metode Vogel yang sama-sama mempertimbangkan c_{ij} dalam pengisian alokasinya, metode ini lebih sederhana, karena bisa langsung menentukan alokasi dengan mempertimbangkan nilai c_{ij} pada tabel, tentu saja yang terkecil, sesuai namanya.

Cara kerjanya adalah: pada tabel pilih nilai c_{ij} terkecil, langsung isikan alokasi pada kotak dengan terkait. Bagaimana jika ada nilai terkecil yang sama, pilih salah satu, jika pilihan ini menyebabkan nilai terkecil yang lain gugur (berada pada baris atau kolom yang sama dan jenuh), maka nilai terkecil yang sama tersebut tidak akan digunakan lagi. Namun jika nilai terkecil yang sama tidak gugur, maka pengisian alokasi berikutnya menggunakan nilai terkecil tersebut. Jika sudah tidak ada nilai terkecil yang sama yang bisa dipilih, maka pilihan dilanjutkan pada nilai c_{ij} terkecil berikutnya (di atas nilai terkecil sebelumnya, namun masih yang terkecil). Dan seterusnya hingga alokasi terakhir yang menyebabkan jenuh bersamaan baris dan kolomnya.

Metode c_{ij} terkecil

Dalam metode ini kotak yang dipilih untuk diisi adalah kotak dengan c_{ij} terkecil atau termurah. Contoh di ambil dari soal sebelumnya

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	b_i	
O_1	3	25 1	4	6	15 6	40	
O_2	7	3	4	30 2	7	30	
O_3	25 2	7	8	9	5 5	30	
O_4	4	5	25 2	5 6	40 9	70	
a_j	25	25	25	35	60	170	

Tampak bahwa c_{ij} terkecil adalah K_{12}, Jadi $x_{12} = 25$; kemudian, sambil memperhatikan baris/kolom yang telah jenuh, $K_{24}, x_{24} = 30$; $K_{31}, x_{31} = 25$; $K_{43}, x_{43} = 25$; $K_{35}, x_{35} = 5$; $K_{15}, x_{15} = 15$; $K_{44}, x_{44} = 5$; dan akhirnya $K_{45}, x_{45} = 40$.

Banyaknya kotak isi adalah K_{12}, K_{24}, K_{31}, K_{43}, K_{35}, K_{15}, K_{44}, dan K_{45}. Jadi ada 8 kotak dan $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$. Jadi solusi layak basis itu tidak merosot.

Total ongkos adalah

$C = 25.1 + 15.6 + 30.2 + 25.2 + 5.5 + 25.2 + 5.6 + 40.9$

$= 25 + 90 + 60 + 50 + 25 + 50 + 30 + 360$

$= 690$. Sama mahal dengan metode selisih dua c_{ij} terkecil.

Latihan. Masalah Transportasi

Pada Latihan 1-3 tentukan solusi layak basis awal menggunakan

(a) Metode Sudut Barat Laut

(b) Metode Vogel

(c) Metode c_{ij} terkecil

1. $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix},\ a = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 80 \\ 120 \end{bmatrix}$

2. $C = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 9 & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \\ 120 \\ 130 \end{bmatrix},\ a = \begin{bmatrix} 90 \\ 50 \\ 100 \\ 60 \\ 120 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix},\ a = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 110 \\ 50 \end{bmatrix}$

Untuk setiap nomor lakukan:

a. Tentukan skema masalah transportasinya.

b. Tentukan model matematikanya

c. Tentukan tabel transportasinya menggunakan ke-3 metode, dan pada setiap metode

   i. Tentukan variabel basis yang diperoleh (sesuai urutan pengisian).

   ii. Tentukan nilai alokasi (sesuai urutan pengisian).

   iii. Tentukan nilai fungsi tujuan awalnya.