Masalah Dualitas Pada Masalah PL Metode Simpleks

Dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali kejadian yang bersifat dualisme atau mempunyai pasangan yang saling bertentangan.

Contoh: hidup dan mati, harga naik-daya beli turun, kemarau-gagal panen, dsb.

Bisa dibaca pada literatur-literatur yang ada. Pada perkuliahan ini disajikan teknis masalah dualitas pada masalah PL sedangkan bagaimana menyelesaikannya akan dibahas pada pertemuan pekan berikutnya.

Masalah PL juga mempunyai dualnya, dinamakan dengan dualitas. Namun di dalam masalah PL dualitas hanya berbeda pada perumusan masalahnya saja, adapun penyelesaian dan hasil akhirnya pada suatu masalah adalah sama.

Perhatikan kembali masalah PL berikut:

Memaksimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

dengan kendala $A\bar{x}(\leq, =, \geq)\bar{b}, \bar{x} \geq 0$

dengan $\bar{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$,

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Atau dalam bentuk uraian

Memaksimumkan $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

dengan kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n(\leq, =, \geq)b_1$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n(\leq, =, \geq)b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n(\leq, =, \geq)b_1$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Masalah PL tersebut mempunyai 3 komponen, yaitu:

1. Fungsi tujuan, di dalam fungsi tujuan yang diinginkan adalah memperoleh hasil optimum (yaitu maksimum atau minimum).
2. Fungsi Kendala Sumber / Utama, yang di dalamnya dipengaruhi oleh batasan sumber, b_i, dan batasan kebutuhan, a_{ij}.
3. Fungsi Kendala Tanda / Teknis, yaitu batasan-batasan solusi dari variabel yang ada, x_j.

Jangan lupa di dalam masalah PL juga disyaratkan nilai $b_i \geq 0$.

Telah kita pelajari pula berbagai model matematika masalah Pl. Kita panggil kembali ya…

Model-model matematika masalah PL:

1. Bentuk Maksimum Baku:
   Memaksimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$
   dengan kendala $A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.
   Yaitu masalah PL memaksimumkan dengan tanda pertidaksamaan kendala utama $\leq$.
2. Bentuk Minimum Baku:
   Meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$
   dengan kendala $A\bar{x} \geq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.
   Yaitu masalah PL meminimumkan dengan tanda pertidaksamaan kendala utama $\geq$.
3. Bentuk Kendala Campuran:
   Memaksimumkan/Meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$
   dengan kendala $A\bar{x}(\leq, =, \geq)\bar{b}, \bar{x} \geq 0$.
   Yaitu masalah PL memaksimumkan atau meminimumkan dengan tanda pertidaksamaan kendala utama bisa $\leq$ dan atau $\geq$, bisa pula $=$.

Dualitas pada masalah PL terdiri dari masalah Primal dan masalah Dual. Masalah Primal adalah masalah PL yang diperoleh dari masalah PL pada soal yang diberikan namun kendala-kendalanya sudah mempunyai kesamaan tanda pertidaksamaan linearnya. Sedangkan masalah Dual adalah pasangan dari masalah primalnya, sehingga tanda pertidaksamaan linearnya pun masih seragam. Namun jika masalah PL yang dihadapi merupakan masalah PL bentuk kendala campuran, maka dalam pembentukan masalah primal maupun masalah dual diabaikan syarat $b_i \geq 0$. Namun di dalam penyelesaian kedua masalah tersebut dengan metode simpleks syarat $b_i \geq 0$ berlaku lagi, sehingga pada kendala yang memuat $b_i \leq 0$ harus dikalikan -1, sehingga diperoleh $b_i \geq 0$.

Sampai disini bisa diterima ya? Kita lanjutkan ya…

Pembentukan Masalah Primal - Dual

Ingat kembali masalah transpos pada matriks dan vektor di dalam Aljabar Linear, boleh dibuka kembali buku Aljabar Linearnya.

Diberikan matriks dan vektor-vektor berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \bar{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n],$$

matriks dan vektor-vektor ini akan mempunyai bentuk transposnya sebagai berikut, perhatikan perubahan pada ukuran dan elemen penyusunnya:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \bar{b}^T = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m], \bar{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Kita tambahkan untuk vektor variabel $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ pasangannya adalah $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, perhatikan indeks pada kedua vektor, n untuk vektor $\bar{x}$ dan m untuk vektor $\bar{y}$, bersesuaian dengan indeks pada matriks A untuk vektor $\bar{x}$ dan A^T untuk vektor $\bar{y}$. Maka hindari menggunakan notasi y untuk variabel tambahan, namun gunakan s untuk variabel slack, t untuk variabel surplus, dan q untuk variabel artifisial (bukan a ya, karena a kita gunakan untuk elemen matriks A, yaitu matriks kendala utama).

Bentuk-bentuk masalah Primal – Dual:

Untuk bentuk masalah primal – dual ini akan diuraikan masalah PL memaksimumkan dan meminimumkan baku, memaksimumkan dan meminimumkan tidak baku, memaksimumkan kendala campuran, dan beberapa kemungkinan masalah sebagai berikut.

1. **Memaksimumkan Baku**. Jika diberikan masalah PL sebagai berikut:

    Memaksimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

    terhadap kendala $A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Maka masalah **Primal**nya:

Memaksimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

terhadap kendala $A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Yaitu bentuk primalnya adalah masalah PL itu sendiri.

Sedangkan **Dual**nya:

Meminimumkan $f(\bar{y}) = \bar{b}^T\bar{y}$

terhadap kendala $A^T\bar{y} \geq \bar{c}^T, \bar{y} \geq 0$.

Menjadi masalah minimum baku.

Catatan : Dari bentuk primal ke bentuk dual terjadi perubahan:

1. Memaksimumkan menjadi meminimumkan
2. Variabel $\bar{x}$ menjadi variabel $\bar{y}$
3. Koefisien fungsi tujuan $\bar{c}$ menjadi batasan sumber
4. Batasan sumber $\bar{b}$ menjadi koefisien fungsi tujuan
5. $\bar{y} \geq 0$ adalah variabel pada masalah PL bentuk dual (lihat vektor $\bar{y}$ pada uraian sebelumnya).

Secara sama perubahan ini berlaku untuk bentuk primal – dual masalah selanjutnya.

2. **Meminimumkan Baku**. Jika diberikan masalah PL sebagai berikut:

Meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

terhadap kendala $A\bar{x} \geq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Maka masalah **Primal**nya:

Meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

terhadap kendala $A\bar{x} \geq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Yaitu bentuk primalnya adalah masalah PL itu sendiri.

Sedangkan masalah **Dual**nya:

Memaksimumkan $f(\bar{y}) = \bar{b}^T\bar{y}$

terhadap kendala $A^T\bar{y} \leq \bar{c}^T, \bar{y} \geq 0$.

Menjadi masalah maksimum baku.

3. **Memaksimumkan Tidak Baku**. Jika diberikan masalah PL sebagai berikut:

Memaksimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

terhadap kendala $A\bar{x} \geq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Maka masalah **Primal**nya:

Memaksimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

terhadap kendala $A\bar{x} \geq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Yaitu masalah itu sendiri. Tidak perlu diubah menjadi bentuk maksimum baku.

Sedangkan masalah **Dual**nya:

Meminimumkan $f(\bar{y}) = \bar{b}^T\bar{y}$

terhadap kendala $A^T\bar{y} \leq \bar{c}^T, \bar{y} \geq 0$.

Yaitu masalah minimum tidak baku.

4. **Meminimumkan Tidak Baku**. Jika diberikan masalah PL sebagai berikut:

Meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

terhadap kendala $A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Maka masalah **Primal**nya:

Meminimumkan $f(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x}$

terhadap kendala $A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$.

Yaitu masalah itu sendiri. Tidak perlu diubah menjadi masalah minimum baku.

Sedangkan masalah **Dual**nya:

Memaksimumkan $f(\bar{y}) = \bar{b}^T\bar{y}$

terhadap kendala $A^T\bar{y} \geq \bar{c}^T, \bar{y} \geq 0$.

Yaitu masalah maksimum tidak baku.

Berikut ini kita masuk pada Masalah PL Kendala Campuran dan kemungkinan masalah yang bisa saja kita hadapi:

5. **Masalah Kendala Campuran Pertama**. Jika diberikan masalah PL sebagai berikut:

Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 - c_2x_2 + c_3x_3$

terhadap kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Perhatikan pada bentuk pertidaksamaan kendala ke-3, $\geq$, sedang dua kendala yang lain $\leq$. Untuk masalah ini yang tujuan akan dimaksimumkan, kita bisa bawa ke maksimum baku atau maksimum tidak baku. Kita bawa ke bentuk maksimum baku ya, untuk bentuk maksimum tidak baku, silakan dicoba!

Karena akan dibawa ke maksimum baku, maka kendala ke-3 kita kalikan -1 menjadi $-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq -b_3$ sehingga diperoleh,
masalah **Primal**nya:

Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 - c_2x_2 + c_3x_3$

terhadap kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq -b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Membentuk dual masalah tidak perlu pusing dengan $b_3 < 0$, karena diperbolehkan.

Sedangkan masalah **Dual**nya:

Meminimumkan $f(y_1, y_2, y_3) = b_1y_1 + b_2y_2 - b_3y_3$

terhadap kendala

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - a_{31}y_3 \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - a_{32}y_3 \geq -c_2$$
$$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 - a_{33}y_3 \geq c_3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Perhatikan kendala ke-2 $c_2 < 0$, didalam bentuk dual $c_j < 0$ diperbolehkan, jadi biarkan saja.

Untuk masalah meminimumkannya silakan dicoba!

Catatan :

1. Dalam masalah PL bentuk Primal-Dual $b_i < 0$ diijinkan. Namun didalam penyelesaiannya baik penyelesaian Primal atau Dualnya maka syarat $b_i \geq 0$ berlaku.
2. Jika c_j pada bentuk dual menjadi negatif, apabila penyelesaian masalah PL melalui bentuk dualnya, maka kendala dengan $c_j < 0$ dikalikan -1 sehingga c_j menjadi positif, baru

diselesaikan dengan metode simpleks. Secara analog bila kasus tersebut terjadi pada bentuk Primal.

6. **Masalah dengan banyak kendala lebih sedikit dari banyak variabel**. Jika diberikan masalah PL:

   Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

   terhadap kendala

   $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$$
   $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2$$
   $$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

   Perhatikan banyak kendala 2, sedangkan banyak variabel 3.

   Karena merupakan masalah maksimum baku, maka masalah **Primal**nya sama dengan masalah PL nya:

   Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

   terhadap kendala

   $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$$
   $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2$$
   $$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

   Yaitu masalah itu sendiri.

   Sedangkan masalah **Dual**nya:

   Meminimumkan $f(y_1, y_2) = b_1y_1 + b_2y_2$

   terhadap kendala

   $$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1$$
   $$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2$$
   $$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge c_3$$
   $$y_1, y_2 \ge 0.$$

   Perhatikan banyak kendala menjadi 3, sedang banyak variabel menjadi 2.

   Untuk minimum baku silakan dicoba! (Tugas)

Catatan:

1. Pada Primal masalah PL terdiri dari 3 variabel dengan 2 kendala, sedang pada Dual menjadi masalah dengan 2 variabel dengan 3 kendala.
2. Pada masalah Primal-Dual berlaku: Kendala pada Primal menjadi Variabel pada Dual; Sebaliknya, Variabel pada Primal menjadi Kendala pada Dual.

7. **Masalah Kendala Campuran Kedua**. Jika diberikan masalah PL:

Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

terhadap kendala

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Masalah bisa diubah menjadi masalah maksimum baku atau maksimum tidak baku. Uraian berikut untuk maksimum baku. Untuk maksimum tidak baku silakan dicoba!

Karena akan diubah ke maksimum baku, maka akan ada perubahan pada kendala ke-2 dan ke-3. Namun sebelum mengubah ke bentuk primal – dualnya, kita ubah dulu kendala ke-2 (kendala persamaan) menjadi kendala pertidaksamaan. Yaitu kita pecah menjadi dua kendala pertidaksamaan yang saling bertentangan, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$ dan $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$, sehingga diperoleh masalah berikut,

Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

terhadap kendala

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Masalah menjadi mempunyai empat kendala dengan tiga variabel. Setelah itu baru ditentukan Primal-Dualnya sebagai berikut:

Ubah menjadi masalah maksimum baku dengan mengalikan kendala ke-3 dan ke-4 dengan -1, lihat bagian 5. Sehingga,

masalah **Primal**nya:

Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

terhadap kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leq -b_2$$
$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq -b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Catatan: Perhatikan pada soal di atas masalah menjadi mempunyai 4 kendala, dengan 2 kendala $\leq$ dan 2 kendala $\geq$. Maka kita bisa memutuskan apakah Primalnya akan berbentuk $\leq$, Dualnya $\geq$, atau sebaliknya Primalnya $\geq$, Dualnya $\leq$. Coba Anda cek!

Sedangkan masalah **Dual**nya:

Meminimumkan $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = b_1y_1 + b_2y_2 - b_2y_3 - b_3y_4$

terhadap kendala

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - a_{21}y_3 - a_{31}y_4 \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - a_{22}y_3 - a_{32}y_4 \geq c_2$$
$$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 - a_{23}y_3 - a_{33}y_4 \geq c_3$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$

Masalah dengan tiga kendala dan empat variabel. Namun, untuk kasus ini bentuk dual ini belum final, ingat ada kendala persamaan pada soal, sehingga berbeda dengan bagian 6 sebelumnya.

Selanjutnya pembentukan dual akan kita lanjutkan. Ingat kendala ke-2 dan ke-3 pada masalah primal diperoleh dari kendala persamaan, keduanya identik berbeda tanda pertidaksamaan. Prinsip: Kendala pada primal menghasilkan variabel pada dual. Pegang prinsip ini. Sehingga variabel y_2 dan y_3 dua variabel yang terkait, lihat koefisien biaya yang melekat, sama – sama b_2. Sehingga untuk kedua variabel tersebut bisa disederhanakan menjadi $b_2y_2 - b_2y_3 = b_2(y_2 - y_3)$, demikian pula untuk $a_{21}y_2 - a_{21}y_3 = a_{21}(y_2 - y_3)$, dst.

Atau Dualnya secara sederhana menjadi:

Meminimumkan $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = b_1 y_1 + b_2(y_2 - y_3) - b_3 y_4$

terhadap kendala

$a_{11}y_1 + a_{21}(y_2 - y_3) - a_{31}y_4 \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}(y_2 - y_3) - a_{32}y_4 \geq c_2$

$a_{13}y_1 + a_{23}(y_2 - y_3) - a_{33}y_4 \geq c_3$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$

Selanjutnya, jika $y_2' = y_2 - y_3$ dengan y_2' menjadi kendala tak bertanda (ingat materi terakhir bahan kuliah Pertemuan 11 – Kasus-kasus Khusus Masalah PL Metode Simpleks), maka bentuk Dual menjadi:

Meminimumkan $f(y_1, y_2', y_4) = b_1 y_1 + b_2 y_2' - b_3 y_4$

terhadap kendala

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2' - a_{31}y_4 \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2' - a_{32}y_4 \geq c_2$

$a_{13}y_1 + a_{23}y_2' - a_{33}y_4 \geq c_3$

$y_1, y_4 \geq 0$, y_2' tak bertanda.

Catatan:

1. Nilai y_2' tergantung pada hasil $y_2' = y_2 - y_3$. Jika $y_2 > y_3$ maka $y_2' > 0$; $y_2 < y_3$ maka $y_2' < 0$; $y_2 = y_3$ maka $y_2' = 0$.
2. Perhatikan bahwa pada soal kendala ke-2 berbentuk persamaan, pada dualnya variabel ke-2 menjadi tak bersyarat tanda. Jadi jika kendala pada masalah berbentuk persamaan, maka variabel pada dual yang bersesuaian menjadi tak bersyarat tanda. Demikian juga jika masalah yang diberikan adalah masalah dengan salah satu atau lebih variabel tak bersyarat tanda, maka kendala pada dual yang bersesuaian menjadi berbentuk persamaan. Silakan dicoba!

Demikian uraian pembentukan masalah primal – dual yang menjadi dasar masalah dualitas pada pertemuan 12 ini. Sampai disini semoga sudah bisa diterima dengan baik ya. Selanjutnya bagian kalian untuk berlatih dan berlatih….