Kali ini kita akan melakukan uji optimum masalah dualitas menggunakan metode simpleks. Silakan dibuka kembali handout pertemuan 12 lalu, tentang pembentukan masalah primal – dual. Penyelesaian masalah primal – dual dengan metode simpleks, tidak berbeda dengan penyelesaian masalah PL yang sudah dipelajari sebelumnya. Inti dalam masalah dualitas (masalah primal – dual) adalah:

1. Pembentukan masalah primal – dualnya.
2. Keputusan penyelesaian menggunakan masalah primal atau masalah dualnya.
3. Pengambilan keputusan.

Pembentukan masalah primal – dual sudah dibahas, selanjutnya perhatikan teorema berikut:

**Teorema**

Diberikan masalah program linear:

Memaksimumkan $Z = \bar{c}^T.\bar{x}$ dengan kendala $A\bar{x} \leq \bar{b}$ dengan $\bar{x} \geq \bar{0}$ (1)

dan

Meminimumkan $P = \bar{b}^T.\bar{y}$ dengan kendala $A^T\bar{y} \geq \bar{c}$ dengan $\bar{y} \geq \bar{0}$ (2)

Kedua masalah (1) dan (2) adalah *masalah dualitas*. Jika masalah (1) adalah primal, maka (2) adalah dualnya, dan sebaliknya jika masalah (2) adalah primal, maka (1) adalah dualnya.

Pengambilan keputusan penyelesaian apakah menggunakan masalah primal atau masalah dualnya, jika pada soal tidak ada perintah tertentu, maka menjadi kebijaksanaan kita, cara mana yang akan dipilih, masalah primalkah atau masalah dualkah.

Pilihan penyelesaian pada masalah primal ataupun masalah dual, maka penyelesaian masalah tersebut akan menggunakan metode simpleks sama persis seperti yang sudah kita lakukan sebelum-sebelumnya, yang langkah-langkahnya adalah:

1. Ubah masalah ke bentuk kanonik.
2. Bawa ke tabel awal simpleks.
3. Lakukan uji optimal, jika sudah optimal, masalah selesai, namun jika belum optimal, perbaiki tabel, dengan mencari variabel basis baru dan membentuk tabel baru.
4. Ulangi langkah 3, hingga optimal dipenuhi.

Namun jangan lupa, syarat nilai ruas kanan non negatif ($b_i \geq 0$ pada masalah primal atau $c_j \geq 0$ untuk masalah dual) harus tetap kita pegang. Jadi ada tambahan langkah:

1. Ubah kendala yang nilai ruas kanannya negatif, yaitu mengalikan kendala dengan $-1$.
2. Ubah masalah ke bentuk kanonik.
3. Bawa ke tabel awal simpleks.
4. Lakukan uji optimal, jika sudah optimal, masalah selesai, namun jika belum optimal, perbaiki tabel, dengan mencari variabel basis baru dan membentuk tabel baru.
5. Ulangi langkah 3, hingga optimal dipenuhi.

Mengapa penyelesaian boleh memilih melalui masalah primalnya atau masalah dualnya? Karena dalam masalah dualitas, solusi masalah primal akan menjadi solusi masalah dual, sebaliknya solusi masalah masalah dual akan menjadi solusi masalah primal.

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut: (contoh ini untuk mengilustrasi solusi masalah primal adalah solusi masalah dual, sebaliknya solusi masalah dual adalah solusi masalah primal)

**Contoh 1**. Carilah masalah dual dari masalah PL memaksimumkan berikut ini:

Memaksimumkan $P = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 25$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 51$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

***Jawab***.

Masalah primal:

Memaksimumkan $P = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 25$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 51$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

yaitu soal asli sama dengan masalah primal, atau dapat ditulis

Memaksimumkan $c^T.x = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$,

dengan kendala $Ax^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 25 \\ 51 \end{bmatrix}$ dengan $x \geq 0$,

sehingga kita mempunyai matriks dan vektor dari masalah primal sebagai berikut

$$c^T = [5 \quad 4 \quad 6], x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 25 \\ 51 \end{bmatrix}.$$

Dapat dirumuskan masalah dualnya adalah

Meminimumkan $b.y = \begin{bmatrix} 25 \\ 51 \end{bmatrix} [y_1 \quad y_2] = 25y_1 + 51y_2$,

dengan kendala $A^T y^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ dengan $y \geq 0$.

Sehingga kendala masalah dualnya adalah

$y_1 + 2y_2 \geq 5$,

$y_1 + y_2 \geq 4$,

$y_1 + 3y_2 \geq 6$,

$y_1, y_2 \geq 0$

yang meminimumkan $C = 25y_1 + 51y_2$.

Setelah masalah primal kita bawa ke bentuk kanonik (karena $b_i \geq 0, \forall i$) dengan menambah variabel slack $s_1, s_2 \geq 0$, yaitu menjadi

Memaksimumkan $P = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0s_1 + 0s_2$

dengan kendala

$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 + 0s_2 = 25$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0s_1 + s_2 = 51$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $s_1, s_2 \geq 0$

Sekarang perhatikanlah tabel awal pada masalah primal (**dalam contoh ini hanya sebagai ilustrasi saja, variabel slack $s_1, s_2$ ditulis sebagai $y_1, y_2$**):

| | $c_j$ | 5 | 4 | 6 | 0 | 0 | $b_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}_i$ | $\bar{x}_i$ $x_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | | |
| 0 | $y_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 25 | |
| 0 | $y_2$ | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | 51 | |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | $z_j - c_j$ | $-5$ | $-4$ | $-6$ | 0 | 0 | | |

Kemudian perhatikanlah entri-entri yang diberi kotak berwarna, dengan mengabaikan kolom-kolom pada variabel slack dan koefisien $x_1, x_2, x_3$ dibuat nol dulu, maka kita memperoleh **tabel ringkas berikut: (Sekali lagi, ini hanya untuk ilustrasi saja)**

| | $c_j$ | 0 | 0 | 0 | $b_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}_i$ | $\bar{x}_i \quad x_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
| 0 | $y_1$ | 1 | 1 | 1 | 25 | |
| 0 | $y_2$ | 2 | 1 | 3 | 51 | |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | $z_j - c_j$ | $-5$ | $-4$ | $-6$ | | |

Dari tabel awal masalah primal ini bisa kita baca:

1. Masalah Primal (Baca dari atas ke bawah):
   a. Variabel $x_1, x_2, x_3$ merupakan variabel non basis masalah, dengan koefisiennya $c_j = (0, 0, 0)$ (**dijadikan nol dulu, ingat hanya untuk ilustrasi**)
   b. Variabel $y_1, y_2$ yaitu variabel slack merupakan variabel basis masalah, dengan koefisiennya $\bar{c}_i = (0, 0)$
   c. Matriks utama adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
   d. Nilai ruas kanan adalah $\begin{bmatrix} 25 \\ 51 \end{bmatrix}$
   e. Solusi (awal) masalah adalah $P = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0y_1 + 0y_2 = 5.0 + 4.0 + 6.0 + 0.25 + 0.51 = 0$ pada plb $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (0,0,0,25,51)$.
2. Masalah Dual (Baca dari kiri ke kanan):
   a. Variabel $y_1, y_2$ merupakan variabel non basis masalah, dengan koefisiennya $\bar{c}_i = (0, 0)$
   b. Variabel $x_1, x_2, x_3$ yaitu variabel artifisial merupakan variabel basis masalah, dengan koefisiennya $c_j = (0, 0, 0)$, sedang variabel surplus $t_1, t_2, t_3$ merupakan variabel non basis dan nilainya nol (pada ilustrasi ini tidak dituliskan)
   c. Matriks utama adalah $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

d. Nilai ruas kanan adalah $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ (pada tabel bertanda negatif, karena meminimumkan, pada tabel ringkas masih dinolkan, yaitu pada baris $c_j$)

e. Solusi (awal) masalah adalah $C = 25y_1 + 51y_2 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 25.0 + 51.0 + 0.5 + 0.4 + 0.6 = 0$ pada plb $(y_1, y_2, x_1, x_2, x_3) = (0,0,5,4,6)$.

Melalui ilustrasi ini diperoleh:

1. Dalam suatu tabel simpleks, bisa dibaca kedua persoalan, primal dan dual.
2. Baris pada masalah primal menjadi kolom pada dualnya. Sebaliknya kolom pada primal menjadi baris pada dualnya.
3. Variabel basis pada primal menjadi variabel non basis pada dualnya. Sebaliknya variabel non basis pada primal menjadi variabel basis pada dualnya. (Hati-hati pada masalah dengan variabel surplus dan artifisial).
4. Koefisien fungsi tujuan pada primal menjadi nilai ruas kanan pada dualnya (perhatikan maksimum-minimum fungsi tujuannya). Sebaliknya nilai ruas kanan pada primal menjadi nilai fungsi tujuan pada dualnya.

Selebihnya untuk penyelesaian dengan metode simpleks tetap mengikuti alur metode simpleks yang telah dipelajari. Sekali lagi Contoh 1 hanya untuk mengilustrasikan, bahwa hasil pada tabel masalah primal, bisa digunakan untuk membaca hasil masalah dualnya. Sebaliknya hasil pada tabel masalah dual, bisa digunakan untuk membaca hasil masalah primalnya.

Berikutnya ada contoh sesungguhnya

**Contoh 2.**

Meminimumkan $3x_1 + 2x_2$

dengan kendala $x_1 + 2x_2 \leq 10$

$5x_1 + x_2 \geq 10$

$x_1 + 10x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Rumuskan masalah dualnya dan kemudian selesaikanlah dengan metode simpleks.

**Jawab:**

Karena masalah meminimumkan, maka pada penyelesaian ini dibentuk masalah primalnya sebagai masalah minimum baku, yaitu dengan mengubah kendala pertama menjadi pertidaksamaan $\geq$ sebagai berikut

$-x_1 - 2x_2 \geq -10.$

Diperoleh masalah Primal adalah

Meminimumkan $C = 3x_1 + 2x_2$

dengan kendala $-x_1 - 2x_2 \geq -10$

$5x_1 + x_2 \geq 10$

$x_1 + 10x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0.$

an masalah dualnya adalah

Memaksimumkan $P = -10y_1 + 10y_2 + 20y_3$

dengan kendala $-y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 3$

$-2y_1 + y_2 + 10y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$

**Menyelesaikan masalah primalnya**

Meminimumkan $C = 3x_1 + 2x_2$

dengan kendala $-x_1 - 2x_2 \geq -10$

$5x_1 + x_2 \geq 10$

$x_1 + 10x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Penyelesaian:

Ubah tujuan menjadi memaksimumkan $C^* = -C = -3x_1 - 2x_2$.

Ubah kendala pertama sehingga nilai batasan menjadi positif $x_1 + 2x_2 \leq 10$.

Ubah masalah ke bentuk kanonik. Tambahkan variabel slack $s_1 \geq 0$, variabel surplus $t_1, t_2 \geq 0$, dan variabel artifisial $q_1, q_2 \geq 0$, sehingga kendala menjadi

$x_1 + 2x_2 + s_1 = 10$

$5x_1 + x_2 - t_1 + q_1 = 10$

$x_1 + 10x_2 - t_2 + q_2 = 20$

$x_1, x_2, s_1, t_1, t_2, q_1, q_2 \geq 0,$

yang memaksimumkan $C^* = -3x_1 - 2x_2 + 0s_1 + 0t_1 + 0t_2 - Mq_1 - Mq_2$.

Tabel awal

| | $c_j$ | $-3$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $-M$ | $b_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}_i$ | $\bar{x}_i \backslash x_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $q_1$ | $q_2$ | | |
| $0$ | $s_1$ | $1$ | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $10$ | $5$ |
| $-M$ | $q_1$ | $5$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $10$ | $10$ |
| $-M$ | $q_2$ | $1$ | $10$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $20$ | $2$ |
| | $z_j$ | $-6M$ | $-11M$ | $0$ | $M$ | $M$ | $-M$ | $-M$ | $-30M$ | |
| | $z_j - c_j$ | $-6M + 3$ | $-11M + 2$ | $0$ | $M$ | $M$ | $0$ | $0$ | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - c_j < 0$

Pilih $z_2 - c_2 = -11M + 2$ sebagai nilai terkecil diperoleh $x_2$ sebagai variabel masuk, dan rasio 2 sebagai rasio terkecil, diperoleh $q_2$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_3' = \frac{1}{10}B_3$

$B_1' = B_1 - 2B_3'$

$B_2' = B_2 - B_3'$

Tabel Kedua (bantu cek ya)

| | $c_j$ | $-3$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $-M$ | $b_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}_i$ | $\bar{x}_i \backslash x_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $q_1$ | $q_2$ | | |
| $0$ | $s_1$ | $\frac{4}{5}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{5}$ | $0$ | $-\frac{1}{5}$ | $5$ | $\frac{25}{4}$ |
| $-M$ | $q_1$ | $\frac{49}{10}$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $\frac{1}{10}$ | $1$ | $-\frac{1}{10}$ | $8$ | $\frac{80}{49}$ |
| $-2$ | $x_2$ | $\frac{1}{10}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-\frac{1}{10}$ | $0$ | $\frac{1}{10}$ | $2$ | $20$ |
| | $z_j$ | $-\frac{49}{10}M - \frac{2}{10}$ | $-2$ | $0$ | $M$ | $-\frac{1}{10}M + \frac{2}{10}$ | $-M$ | $\frac{1}{10}M - \frac{2}{10}$ | $-8M - 4$ | |
| | $z_j - c_j$ | $-\frac{49}{10}M + \frac{28}{10}$ | $0$ | $0$ | $M$ | $-\frac{1}{10}M + \frac{2}{10}$ | $0$ | $\frac{11}{10}M$ | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - c_j < 0$

Pilih $z_1 - c_1 = -\frac{49}{10}M + \frac{28}{10}$ sebagai nilai terkecil diperoleh $x_1$ sebagai variabel masuk, dan rasio $\frac{80}{49}$ sebagai rasio terkecil, diperoleh $q_1$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_2'' = \frac{10}{49}B_2'$

$B_1'' = B_1' - \frac{4}{5}B_2''$

$B_3'' = B_3' - \frac{1}{10}B_2''$

Tabel ketiga

| | $c_j$ | $-3$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $-M$ | $b_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}_i$ | $\bar{x}_i \backslash x_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $q_1$ | $q_2$ | | |
| $0$ | $s_1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{8}{49}$ | $\frac{9}{49}$ | $-\frac{8}{49}$ | $-\frac{9}{49}$ | $\frac{181}{49}$ | |
| $-3$ | $x_1$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-\frac{10}{49}$ | $\frac{1}{49}$ | $\frac{10}{49}$ | $-\frac{1}{49}$ | $\frac{80}{49}$ | |
| $-2$ | $x_2$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{49}$ | $-\frac{5}{49}$ | $-\frac{1}{49}$ | $\frac{5}{49}$ | $\frac{90}{49}$ | |
| | $z_j$ | $-3$ | $-2$ | $0$ | $\frac{28}{49}$ | $\frac{7}{49}$ | $-\frac{28}{49}$ | $-\frac{7}{49}$ | $-\frac{60}{7}$ | |
| | $z_j - c_j$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{28}{49}$ | $\frac{7}{49}$ | $M - \frac{28}{49}$ | $M - \frac{7}{49}$ | | |

Uji optimal: tabel sudah optimal, $z_j - c_j \geq 0, \forall j$.

Kesimpulan: diperoleh nilai maksimum $Z^* = -\frac{60}{7} = -3x_1 - 2x_2 + 0s_1 + 0t_1 + 0t_2 - Mq_1 - Mq_2 = -3.\frac{80}{49} - 2.\frac{90}{49} + 0.\frac{181}{49} + 0.0 + 0.0 - M.0 - M.0$, pada plb $(x_1, x_2, s_1, t_1, t_2, q_1, q_2) = \left(\frac{80}{49}, \frac{90}{49}, \frac{181}{49}, 0,0,0,0\right)$. Atau meminimumkan $C = -C^* = -\left(\frac{60}{7}\right) = \frac{60}{7}$.

**Menyelesaikan masalah dualnya**

Memaksimumkan $P = -10y_1 + 10y_2 + 20y_3$

dengan kendala $-y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 3$

$-2y_1 + y_2 + 10y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$

Penyelesaian:

Masalah diubah ke bentuk kanonik. Tambahkan variabel slack $s_1, s_2 \geq 0$ sehingga kendala menjadi

$$-y_1 + 5y_2 + y_3 + s_1 \leq 3$$
$$-2y_1 + y_2 + 10y_3 + s_2 \leq 2$$
$$y_1, y_2, y_3, s_1, s_2 \geq 0,$$

yang memaksimumkan $P = -10y_1 + 10y_2 + 20y_3 + 0s_1 + 0s_2$.

Tabel awal

| | $b_j$ | $-10$ | $10$ | $20$ | $0$ | $0$ | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \backslash y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| $0$ | $s_1$ | $-1$ | $5$ | $1$ | $1$ | $0$ | $3$ | $3$ |
| $0$ | $s_2$ | $-2$ | $1$ | $10$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\frac{1}{5}$ |
| | $z_j$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | |
| | $z_j - b_j$ | $10$ | $-10$ | $-20$ | $0$ | $0$ | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - b_j < 0$

Pilih $z_3 - b_3 = -20$ sebagai nilai terkecil diperoleh $y_3$ sebagai variabel masuk, dan rasio $\frac{1}{5}$ sebagai rasio terkecil, diperoleh $s_2$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_2' = \frac{1}{10} B_2$

$B_1' = B_1 - B_2'$

Tabel kedua

| | $b_j$ | $-10$ | $10$ | $20$ | $0$ | $0$ | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \backslash y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| $0$ | $s_1$ | $-\frac{8}{10}$ | $\frac{49}{10}$ | $0$ | $1$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{28}{10}$ | $\frac{4}{7}$ |
| $20$ | $y_3$ | $-\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $2$ |
| | $z_j$ | $-4$ | $2$ | $20$ | $0$ | $2$ | $4$ | |
| | $z_j - b_j$ | $6$ | $-8$ | $0$ | $0$ | $2$ | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - b_j < 0$

Pilih $z_2 - b_2 = -8$ sebagai nilai terkecil diperoleh $y_2$ sebagai variabel masuk, dan rasio $\frac{4}{7}$ sebagai rasio terkecil, diperoleh $s_1$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_1' = \frac{10}{49}B_1$

$B_2' = B_2 - \frac{1}{10}B_1'$

Tabel ketiga

| | $b_j$ | $-10$ | $10$ | $20$ | $0$ | $0$ | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \backslash y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| 10 | $y_2$ | $-\frac{8}{49}$ | 1 | 0 | $\frac{10}{49}$ | $-\frac{1}{49}$ | $\frac{4}{7}$ | |
| 20 | $y_3$ | $-\frac{9}{49}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{49}$ | $\frac{5}{49}$ | $\frac{1}{7}$ | |
| | $z_j$ | $-\frac{260}{49}$ | 10 | 20 | $\frac{80}{49}$ | $\frac{90}{49}$ | $\frac{60}{7}$ | |
| | $z_j - b_j$ | $\frac{230}{49}$ | 0 | 0 | $\frac{80}{49}$ | $\frac{90}{49}$ | | |

Uji optimal: tabel sudah optimum, semua nilai $z_j - b_j \geq 0$

Kesimpulan: diperoleh nilai maksimum $P = \frac{60}{7} = -10y_1 + 10y_2 + 20y_3 + 0s_1 + 0s_2 = -10.0 + 10.\frac{4}{7} + 20.\frac{1}{7} + 0.0 + 0.0$, pada plb $(y_1, y_2, y_3, s_1, s_2) = \left(0, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, 0{,}0\right)$.

Tolong dicek ya, seharusnya hasil pada tabel optimum $z_1 - b_1 = \frac{181}{49}$ !

**Contoh 3.**

Meminimumkan fungsi $C = 2x_1 + x_2$, terhadap kendala

$10x_1 + x_2 \geq 10$

$2x_1 + x_2 \geq 8$

$x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \geq 10$

$x_1 + 12x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

**Penyelesaian:**

Tentukan dulu primal dualnya.

**Primalnya adalah**

Meminimumkan fungsi $C = 2x_1 + x_2$, terhadap kendala

$10x_1 + x_2 \geq 10$

$2x_1 + x_2 \geq 8$

$x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \geq 10$

$x_1 + 12x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0.$

**Sedangkan dualnya adalah**

Memaksimumkan $P = 10y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 10y_4 + 12y_5$, terhadap kendala

$10y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 2$

$y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 12y_5 \leq 1$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0.$

Agar kita bekerja dengan tabel yang lebih kecil, kita memilih mengerjakan dualnya.

**Penyelesaian masalah dualnya**

Memaksimumkan $P = 10y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 10y_4 + 12y_5$, terhadap kendala

$10y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 2$

$y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 12y_5 \leq 1$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0.$

**Jawab:**

Ubah masalah ke bentuk kanonik, dengan menambahkan variabel slack $s_1, s_2 \geq 0$ sebagai berikut

$10y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + s_1 = 2$

$y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 12y_5 + s_2 = 1$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, s_1, s_2 \geq 0,$

yang memaksimumkan $P = 10y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 10y_4 + 12y_5 + 0s_1 + 0s_2$.

Tabel awal

| | $b_j$ | 10 | 8 | 6 | 10 | 12 | 0 | 0 | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \backslash y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| 0 | $s_1$ | 10 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| 0 | $s_2$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 12 | 0 | 1 | 1 | $\frac{1}{12}$ |
| | $z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | $z_j - b_j$ | $-10$ | $-8$ | $-6$ | $-10$ | $-12$ | 0 | 0 | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - b_j < 0$

Pilih $z_5 - b_5 = -12$ sebagai nilai terkecil diperoleh $y_5$ sebagai variabel masuk, dan rasio $\frac{1}{12}$ sebagai rasio terkecil, diperoleh $s_2$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_2' = \frac{1}{12} B_2$

$B_1' = B_1 - B_2'$

Tabel kedua

| | $b_j$ | 10 | 8 | 6 | 10 | 12 | 0 | 0 | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \backslash y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| 0 | $s_1$ | $\frac{119}{12}$ | $\frac{23}{12}$ | $\frac{11}{12}$ | $\frac{10}{12}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{12}$ | $\frac{23}{12}$ | $\frac{23}{119}$ |
| 12 | $y_5$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 1 |
| | $z_j$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 12 | 0 | 1 | 1 | |
| | $z_j - b_j$ | $-9$ | $-7$ | $-5$ | $-8$ | 0 | 0 | 1 | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - b_j < 0$

Pilih $z_1 - b_1 = -9$ sebagai nilai terkecil diperoleh $y_1$ sebagai variabel masuk, dan rasio $\frac{23}{119}$ sebagai rasio terkecil, diperoleh $s_1$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_1' = \frac{12}{119} B_1$

$B_2' = B_2 - \frac{1}{12} B_1'$

Tabel ketiga

| | $b_j$ | 10 | 8 | 6 | 10 | 12 | 0 | 0 | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \backslash y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| 10 | $y_1$ | 1 | $\frac{23}{119}$ | $\frac{11}{119}$ | $\frac{10}{119}$ | 0 | $\frac{12}{119}$ | $-\frac{1}{119}$ | $\frac{23}{119}$ | $\frac{23}{10}$ |
| 12 | $y_5$ | 0 | $\frac{8}{119}$ | $\frac{9}{119}$ | $\frac{19}{119}$ | 1 | $-\frac{1}{119}$ | $\frac{10}{119}$ | $\frac{8}{119}$ | $\frac{8}{19}$ |
| | $z_j$ | 1 | $\frac{134}{119}$ | $\frac{218}{119}$ | $\frac{328}{119}$ | 12 | $\frac{108}{119}$ | $\frac{110}{119}$ | $\frac{134}{119}$ | |
| | $z_j - b_j$ | 0 | $-\frac{818}{119}$ | $-\frac{496}{119}$ | $-\frac{862}{119}$ | 0 | $\frac{108}{119}$ | $\frac{110}{119}$ | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - b_j < 0$

Pilih $z_4 - b_4 = -\frac{862}{119}$ sebagai nilai terkecil diperoleh $y_4$ sebagai variabel masuk, dan rasio $\frac{8}{19}$ sebagai rasio terkecil, diperoleh $y_5$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_2' = \frac{119}{19} B_2$

$B_1' = B_1 - \frac{10}{119} B_2'$

Tabel keempat

| | $b_j$ | 10 | 8 | 6 | 10 | 12 | 0 | 0 | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \backslash y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| 10 | $y_1$ | 1 | $\frac{3}{19}$ | $\frac{1}{19}$ | 0 | $-\frac{10}{19}$ | $\frac{2}{19}$ | $-\frac{1}{19}$ | $\frac{3}{19}$ | 1 |
| 10 | $y_4$ | 0 | $\frac{8}{19}$ | $\frac{9}{19}$ | 1 | $\frac{119}{19}$ | $-\frac{1}{19}$ | $\frac{10}{19}$ | $\frac{8}{19}$ | 1 |
| | $z_j$ | 10 | $\frac{38}{19}$ | $\frac{100}{19}$ | 10 | $\frac{1090}{19}$ | $\frac{10}{19}$ | $\frac{90}{19}$ | $\frac{110}{19}$ | |
| | $z_j - p_j$ | 0 | $-\frac{74}{19}$ | $-\frac{14}{19}$ | 0 | $\frac{862}{19}$ | $\frac{10}{19}$ | $\frac{90}{19}$ | | |

Uji optimal: tabel belum optimal, masih ada nilai $z_j - b_j < 0$

Pilih $z_2 - b_2 = -\frac{74}{19}$ sebagai nilai terkecil diperoleh $y_2$ sebagai variabel masuk, dan rasio 1 sebagai rasio terkecil, diperoleh $y_4$ sebagai variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE

$B_2' = \frac{8}{19} B_2$

$B_1' = B_1 - \frac{3}{19} B_2'$

Tabel keempat

| | $b_j$ | 10 | 8 | 6 | 10 | 12 | 0 | 0 | $c_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{b}_i$ | $\bar{y}_i \diagdown y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
| 10 | $y_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $-\frac{3}{8}$ | $-\frac{23}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $-\frac{2}{8}$ | 0 | |
| 8 | $y_2$ | 0 | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{19}{8}$ | $\frac{119}{8}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{10}{8}$ | 1 | |
| | $z_j$ | 10 | 8 | $\frac{82}{8}$ | $\frac{122}{8}$ | $\frac{722}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{60}{8}$ | 8 | |
| | $z_j - b_j$ | 0 | 0 | $\frac{34}{8}$ | $\frac{42}{8}$ | $\frac{626}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{60}{8}$ | | |

Uji optimal: tabel sudah optimum, semua nilai $z_j - b_j \geq 0$

Kesimpulan: diperoleh nilai maksimum $P = 8 = 10y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 10y_4 + 12y_5 + 0s_1 + 0s_2 = 10.0 + 8.1 + 6.0 + 10.0 + 12.0 + 0.0 + 0.0$, pada plb $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, s_1, s_2) = (0,1,0,0,0,0,0)$.

**Latihan. Uji Optimum Masalah Dualitas. Silakan selesaikan melalui primal dan dualnya. Kesimpulan apa yang bisa diambil dari penyelesaian kedua soal berikut.**

1. Memaksimumkan $Z = 3x_1 + x_2 + 4x_3$

   dengan kendala $3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 18$

   $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$
2. Meminimumkan $Z = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3$

   dengan kendala $4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 18$

   $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$

   $x_1, x_2 \geq 0.$